模块四 三角函数提高篇

第 1 节 三角函数图象性质综合问题（★★★☆）

内容提要

三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象性质的综合应用考题有时难度较大，本节专门归纳一些有创新性的考题，解题的关键是抓住图象上的一些特征来综合分析问题.

典型例题

类型Ⅰ：利用图象比较函数值大小

【例 1】设 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，且 $f(x)\le f(\frac{2\pi}{9})$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，记 $p=f(\frac{2\pi}{3})$，$q=f(\frac{5\pi}{6})$，$r=f(\frac{7\pi}{6})$，则 p，q，r 的大小关系是（　　）

（A）$r<p<q$　　（B）$q<r<p$　　（C）$p<q<r$　　（D）$q<p<r$

解析： 由题意，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，$f(x)\le f(\frac{2\pi}{9})\Rightarrow f(x)$ 在 $x=\frac{2\pi}{9}$ 处取得最大值，

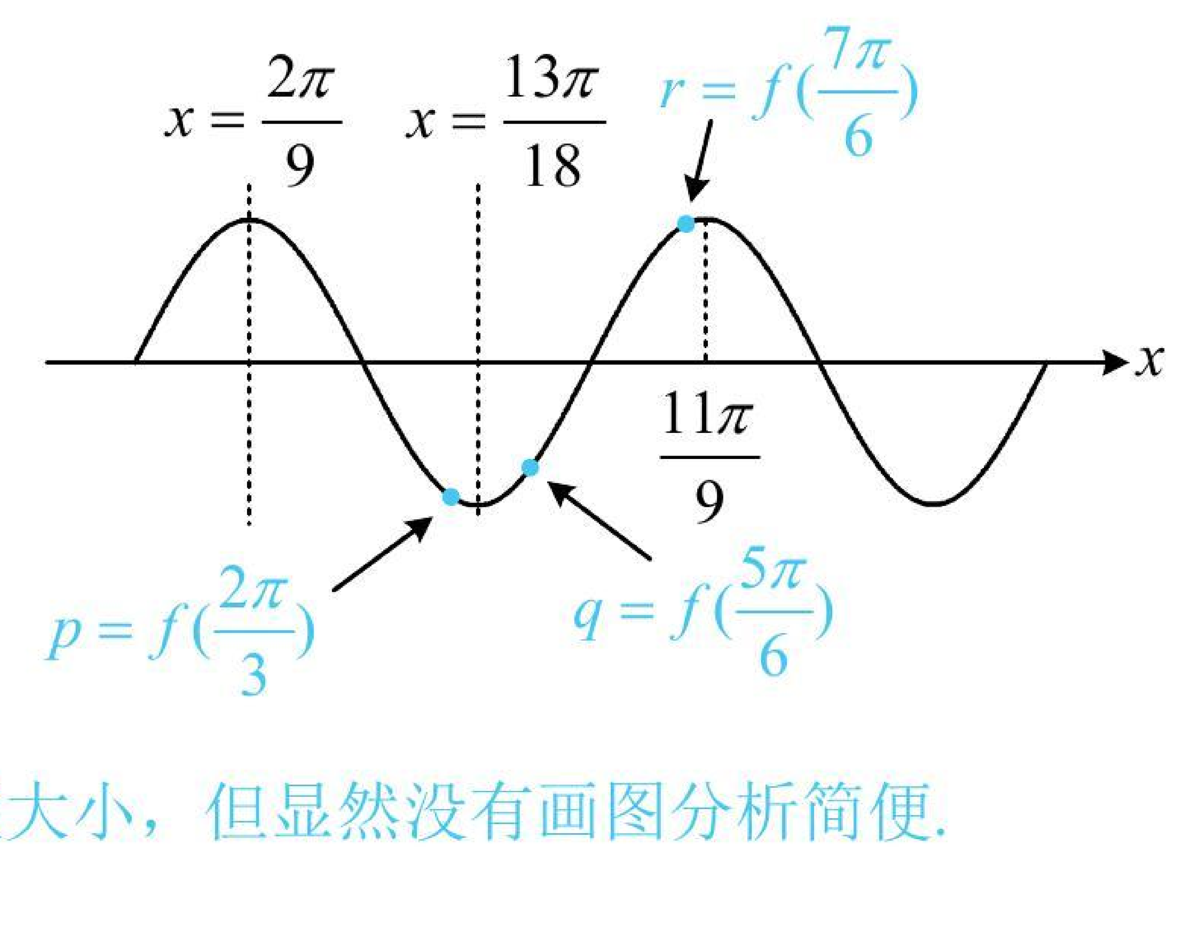
最大值处即为对称轴，知道一个最大值点和周期，可作出函数的草图，推断其它最值点，例如 $x=\frac{2\pi}{9}$ 右侧的两条对称轴依次为 $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{2}=\frac{13\pi}{18}$，$x=\frac{2\pi}{9}+\pi=\frac{11\pi}{9}$，于是可直接在图中标注 p，q，r 的位置，就能比较大小，如图，p，q 都在 $x=\frac{13\pi}{18}$ 这个最小值点附近，

可以看谁的自变量离 $x=\frac{13\pi}{18}$ 更远，谁就更大，

因为 $\frac{5\pi}{6}-\frac{13\pi}{18}=\frac{\pi}{9}>\frac{13\pi}{18}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{18}$，所以 $p<q$，

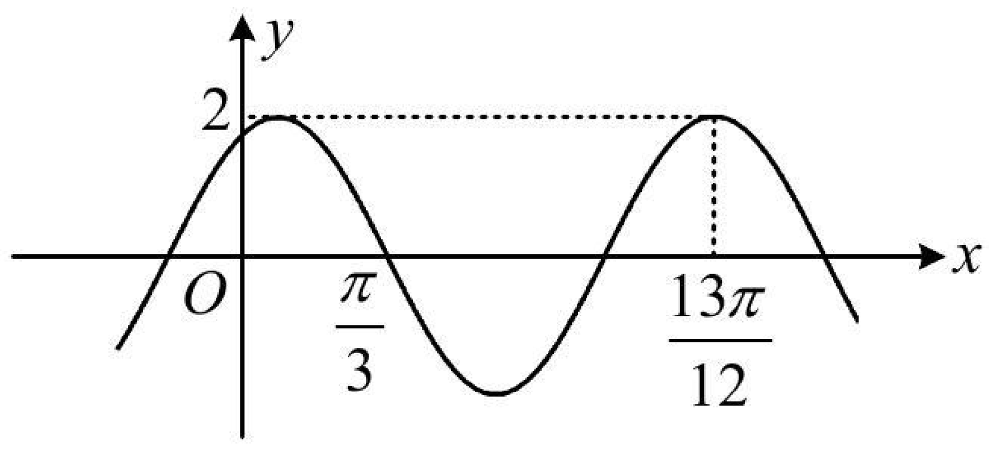
由图可知 $q<r$，故 $p<q<r$.

答案： C



【反思】本题当然可以将最值点代入解析式求出 φ，再代值比较大小，但显然没有画图分析简便.

【例 2】（2021·全国甲卷）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为_____.



解析：由图可知，$\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}T$，所以$T=\pi$，于是可将$f(-\frac{7\pi}{4})$和$f(\frac{4\pi}{3})$化为$f(\frac{\pi}{4})$和$f(\frac{\pi}{3})$，便于标注，

所以$(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$即为$(f(x)-f(\frac{\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{\pi}{3}))>0$ ①，

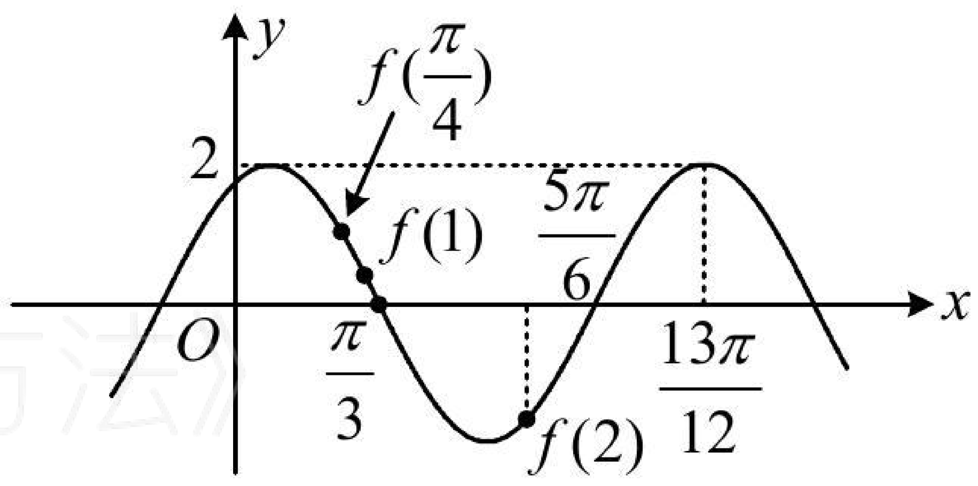
我们直接把$f(\frac{\pi}{4})$和$f(\frac{\pi}{3})$在图中标出来，就能分析不等式①的最小正整数解了，

如图，$f(1)$介于$f(\frac{\pi}{4})$和$f(\frac{\pi}{3})$之间，所以$x=1$不满足不等式①，

$f(2)$比$f(\frac{\pi}{4})$和$f(\frac{\pi}{3})$都小，所以$x=2$满足不等式①，

故满足原不等式的最小正整数x为2.

答案：2



【反思】本题也可根据图象求出$f(x)$解析式，再分析所给不等式，但显然没有数形结合来得清晰快捷.

类型Ⅱ：数形结合综合分析

【例 3】已知函数$f(x)=\sin x+\cos x$的定义域为$[a,b]$，值域为$[-1,\sqrt{2}]$，则$b-a$的取值范围是（　　）

（A）$[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}]$　　（B）$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$　　（C）$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$　　（D）$[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$

解析：由题意，$f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，为了方便作图，先将$x+\frac{\pi}{4}$换元成$t$，

令$t=x+\frac{\pi}{4}$，则$f(x)=\sqrt{2}\sin t$，当$x\in[a,b]$时，$t\in[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}]$，

问题等价于$y=\sqrt{2}\sin t$在$[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}]$上值域为$[-1,\sqrt{2}]$，

首先，$[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}]$肯定不足一个周期，否则值域必为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$；其次，$[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}]$内必有最大值点，

可画出$y=\sqrt{2}\sin t$的图象来分析，

如图，不妨假设区间$[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}]$内的最大值点为$t=\frac{\pi}{2}$，则区间的左、右端点不能越过$-\frac{\pi}{4}$和$\frac{5\pi}{4}$，否则

值域中必有小于 -1 的数，且左、右端点至少有一个与 $-\frac{\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}$ 重合，否则函数的最小值大于 -1，

所以区间 $[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}]$ 最窄的情形如图 1，最宽的情形如图 2，

由图可知 $[(b+\frac{\pi}{4})-(a+\frac{\pi}{4})]_{\min}=\frac{3\pi}{4}$，$[(b+\frac{\pi}{4})-(a+\frac{\pi}{4})]_{\max}=\frac{3\pi}{2}$，

即 $(b-a)_{\min}=\frac{3\pi}{4}$，$(b-a)_{\max}=\frac{3\pi}{2}$，故 $b-a$ 的取值范围是 $[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$.

答案：D

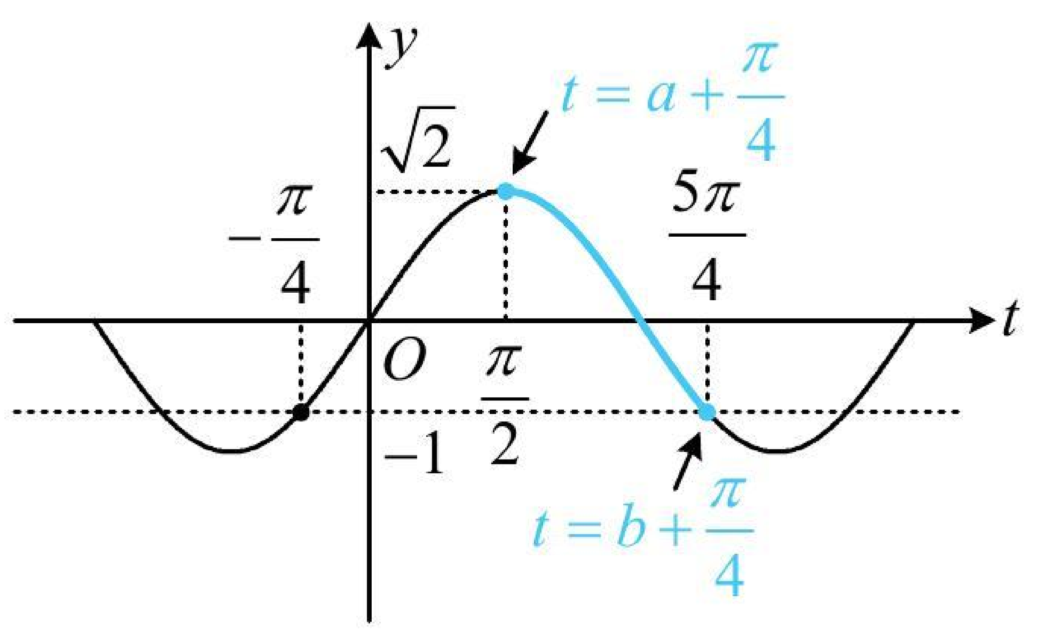


图1

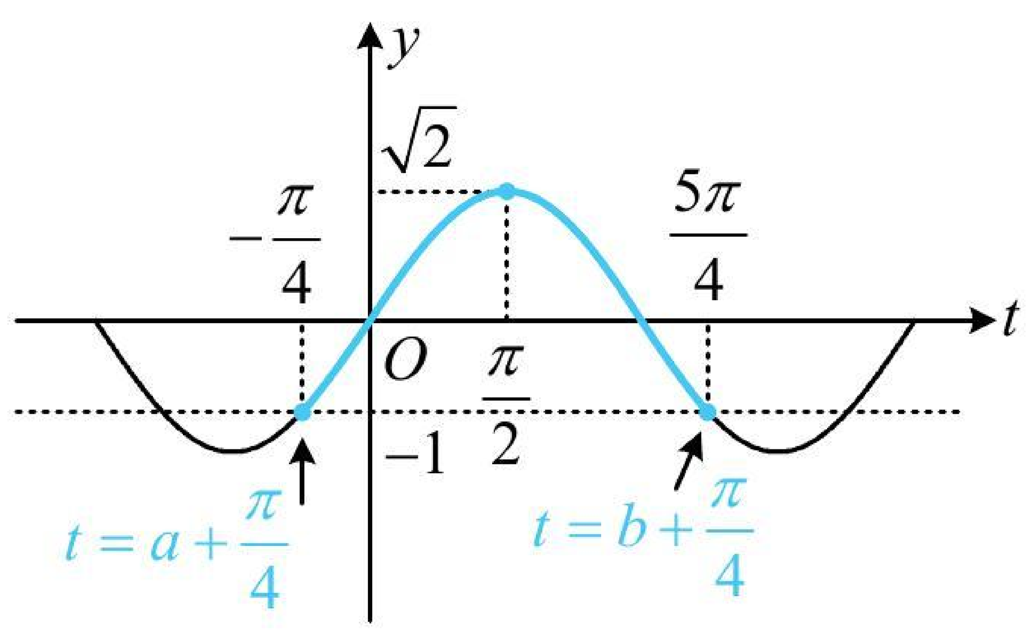


图2

【例 4】已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})-2\sin^2(x+\frac{\pi}{6})+1$，把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 x_1，x_2 是 $g(x)=m$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内的两根，则 $\sin(x_1+x_2)$ 的值为（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（D）$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：由题意，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{5}\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$，

其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，注意此处 φ 不是变量，而是一个确定的非特殊锐角，

由题意，$g(x)=f(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{5}\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}+\varphi]=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)$，

要研究方程 $g(x)=m$ 根的情况，考虑画图分析，为了便于作图，将 $2x+\varphi$ 换元成 t，

令 $t=2x+\varphi$，则 $g(x)=\sqrt{5}\sin t$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$t\in[\varphi,\pi+\varphi]$，函数 $y=\sqrt{5}\sin t$ 的部分图象如图所示，

$g(x)=m\Leftrightarrow\sqrt{5}\sin t=m$，因为 $g(x)=m$ 有两根 x_1，x_2，所以方程 $\sqrt{5}\sin t=m$ 有两根 t_1，t_2，

如图，直线 $y=m$ 与 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\pi+\varphi]$ 上的图象的两个交点的横坐标就是 t_1，t_2，

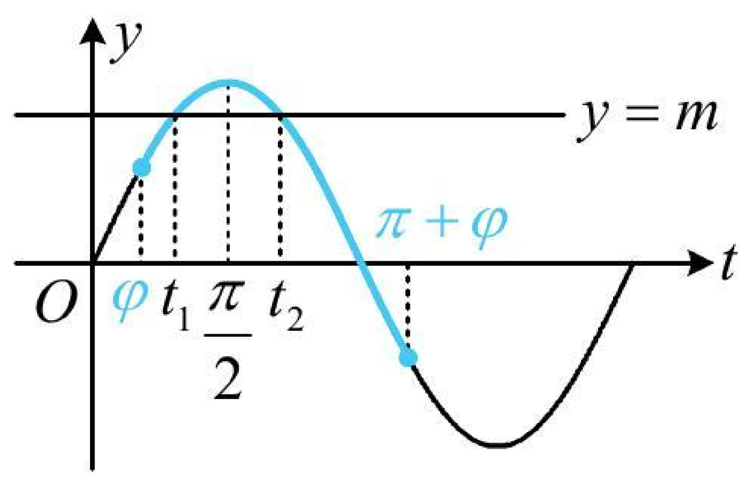
由图可知，两个交点关于直线 $t=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以 $\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{2}$，

找到了 t_1 和 t_2 的关系，将变量 t 换回成 x，就能转换成 x_1 与 x_2 的关系，

又 $\begin{cases}t_1=2x_1+\varphi\\t_2=2x_2+\varphi\end{cases}$，两式相加整理得：$x_1+x_2=\frac{t_1+t_2}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi$，

故 $\sin(x_1+x_2)=\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

答案：A



【反思】例 3 和例 4 的条件用代数的方法翻译较难，但我们结合图象来翻译，就会变得更直观.

类型Ⅲ：零点、最值点推周期

【例 5】已知 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 图象的一条对称轴，且 $x=\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的与该对称轴相邻的零点，则 $f(\frac{\pi}{4})=$______.

解析： 条件中有相邻的对称轴和零点，它们之间的距离为 $\frac{T}{4}$，故可由此求出周期，再得到 ω，

由题意，$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{4}$，所以 $T=\pi$，从而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

再求 φ，代对称轴或零点都行，不妨代对称轴，因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 是对称轴，所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

故 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，结合 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，故 $f(\frac{\pi}{4})=2\sin(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

答案： $\sqrt{3}$

【变式】设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$，若 $f(\frac{5\pi}{8})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，且相邻两个零点之间的距离大于 π，则（　　）

（A）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{24}$　（B）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$　（C）$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=\frac{7\pi}{24}$　（D）$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{12}$

解析： $f(\frac{5\pi}{8})=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 的最大值点，$f(\frac{11\pi}{8})=0\Rightarrow x=\frac{11\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 的零点，

注意，与上题相比，本题所给的零点与最值点不一定相邻. 这样虽然不能直接得到周期 T，求出 ω，但它们之间的距离必为 $\frac{T}{4}$ 的正奇数倍，如图，所以仍可由此找到 ω 的通解，

所以 $\frac{11\pi}{8}-\frac{5\pi}{8}=(2n-1)\cdot\frac{T}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$，从而 $\frac{3\pi}{4}=(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2\omega}$，故 $\omega=\frac{2(2n-1)}{3}$，

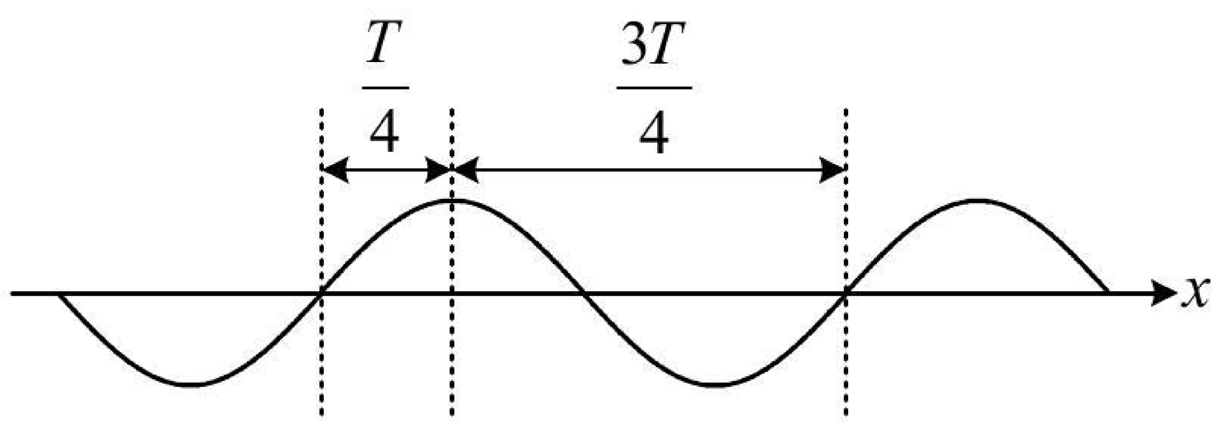
又 $f(x)$ 相邻两个零点之间的距离大于 π，相邻的零点之间的距离为 $\frac{T}{2}$，所以 $\frac{T}{2}>\pi$，故 $T=\frac{2\pi}{\omega}>2\pi$，

从而 $0<\omega<1$，结合 $\omega=\frac{2(2n-1)}{3}$ 可得 n 只能取 1，所以 $\omega=\frac{2}{3}$，故 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{3}x+\varphi)$，

再来求 φ，可代最值点，因为 $f(\frac{5\pi}{8})=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{3}\times\frac{5\pi}{8}+\varphi)=\frac{1}{2}$，故 $\sin(\frac{5\pi}{12}+\varphi)=1$，

又 $|\varphi|<\pi$，所以 $-\pi<\varphi<\pi$，从而 $-\frac{7\pi}{12}<\frac{5\pi}{12}+\varphi<\frac{17\pi}{12}$，故 $\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{12}$.

答案：B



【总结】对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，当给出多个对称轴、零点这类关键点时，若它们相邻，则可直接求周期，得到 ω；若没说相邻，则只能先建立 ω 的通解，再由其它条件筛选 ω. 具体来说，对称轴与对称中心之间的距离是 $\frac{T}{4}$ 的正奇数倍，可表示为 $(2n-1)\cdot\frac{T}{4}$，对称轴与对称轴、对称中心与对称中心的距离都是 $\frac{T}{2}$ 的正整数倍，可表示为 $n\cdot\frac{T}{2}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

类型Ⅳ：三角函数的实际应用

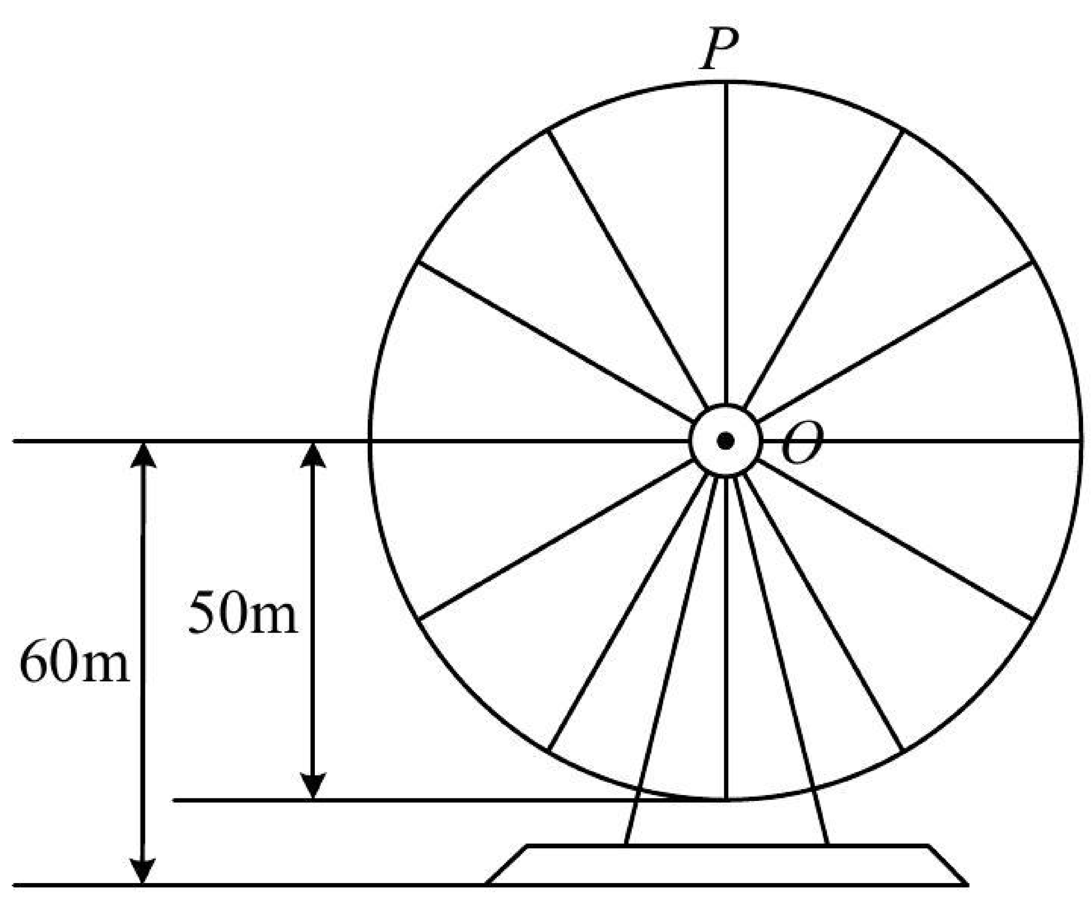
【例 6】如图，摩天轮的半径为 50m，其中心 O 距离地面的高度为 60m，摩天轮按逆时针方向匀速转动，且 20min 转一圈，若摩天轮上点 P 的初始位置为最高点，则摩天轮转动过程中下列说法正确的是（　　）

（A）转动 10min 后点 P 距离地面 8m

（B）若摩天轮转速减半，则转动一圈所需的时间变为原来的 $\frac{1}{2}$

（C）第 17min 和第 42min 点 P 距离地面的高度相同

（D）摩天轮转动一圈，点 P 距离地面的高度不低于 85m 的时间长为 $\frac{20}{3}$min



解析：先建立点 P 距离地面高度随时间变化的函数关系，可设该高度为 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$，其中 $A>0$，

$\omega>0$，只要求出 A，B，ω，φ，解析式就有了，先由最大、最小值求 A 和 B，

由题意，点 P 最高为 110m，最低为 10m，所以 $\begin{cases}A+B=110\\-A+B=10\end{cases}$，解得：$A=50$，$B=60$，

再由初始位置求 φ，初始位置在最高点，所以 $f(0)=50\sin\varphi+60=110$，从而 $\sin\varphi=1$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，

最后由周期求 ω，由题意，20min 转一圈，所以 $T=20$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{10}$，

所以 $f(t)=50\sin(\dfrac{\pi}{10}t+\dfrac{\pi}{2})+60=50\cos\dfrac{\pi}{10}t+60$，

A 项，$f(10)=50\cos(\dfrac{\pi}{10}\times10)+60=50\cos\pi+60=10$，故 A 项错误；

B 项，若摩天轮转速减半，则转动一周的时间加倍，故 B 项错误；

C 项，$f(17)=50\cos(\dfrac{\pi}{10}\times17)+60=50\cos\dfrac{17\pi}{10}+60$，$f(42)=50\cos(\dfrac{\pi}{10}\times42)+60=50\cos\dfrac{21\pi}{5}+60$，

要判断 C 项是否正确，只需看 $\cos\dfrac{17\pi}{10}$ 和 $\cos\dfrac{21\pi}{5}$ 是否相等，用诱导公式化为锐角三角函数来看，

$\cos\dfrac{17\pi}{10}=\cos(\dfrac{17\pi}{10}-2\pi)=\cos(-\dfrac{3\pi}{10})=\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{21\pi}{5}=\cos(4\pi+\dfrac{\pi}{5})=\cos\dfrac{\pi}{5}$，

因为 $\cos\dfrac{3\pi}{10}\neq\cos\dfrac{\pi}{5}$，所以 $f(17)\neq f(42)$，故 C 项错误；

D 项，点 P 距离地面的高度不低于 85m 即 $f(t)\geq85$，也即 $50\cos\dfrac{\pi}{10}t+60\geq85$，所以 $\cos\dfrac{\pi}{10}t\geq\dfrac{1}{2}$，

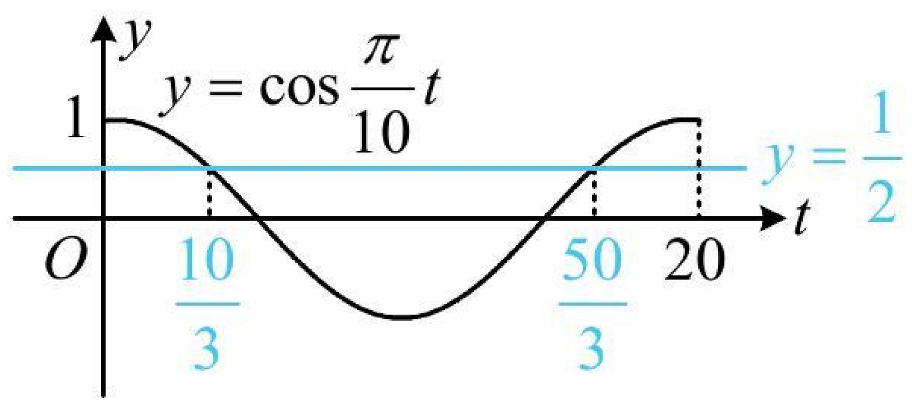
我们可以作图分析在一个周期内，该不等式解的情况，不妨就考虑 $[0,20)$ 这个周期，

当 $0\leq t<20$ 时，$0\leq\dfrac{\pi}{10}t<2\pi$，令 $\cos\dfrac{\pi}{10}t=\dfrac{1}{2}$ 可得 $\dfrac{\pi}{10}t=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5\pi}{3}$，所以 $t=\dfrac{10}{3}$ 或 $\dfrac{50}{3}$，

如图，在 $[0,20)$ 这个周期内，$\cos\dfrac{\pi}{10}t\geq\dfrac{1}{2}$ 的解集为 $[0,\dfrac{10}{3}]\cup[\dfrac{50}{3},20)$，

故点 P 距离地面的高度不低于 85m 的时间长为 $\dfrac{10}{3}+(20-\dfrac{50}{3})=\dfrac{20}{3}$ min，故 D 项正确.

答案：D



强化训练

1.（2018·北京卷·★★）设 $f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(x)\leq f(\dfrac{\pi}{4})$ 对任意实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

2.（★★★）已知 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且关于 $(-\dfrac{\pi}{8},0)$ 对称，则（　　）

（A）$f(0)<f(2)<f(1)$　　（B）$f(2)<f(1)<f(0)$　　（C）$f(2)<f(0)<f(1)$　　（D）$f(1)<f(0)<f(2)$

3.（★★★）已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2$，则 $f(\dfrac{\pi}{8})+f(\dfrac{2\pi}{8})+\cdots+f(\dfrac{13\pi}{8})=$（　　）

（A）0　（B）10　（C）16　（D）26

4.（2022•潍坊一模•★★★）设函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 在 $[a,a+\dfrac{\pi}{4}]$ 的最大值为 $g_1(a)$，最小值为 $g_2(a)$，则 $g_1(a)-g_2(a)$ 的最小值为（　　）

（A）1　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　（D）$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

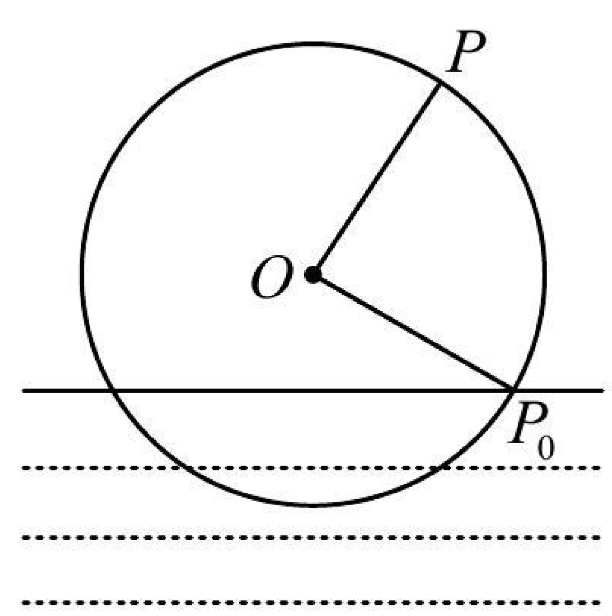
5．（2022 • 确山月考 • ★★★）一半径为 4.8m 的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面 2.4m，已知水轮每 60s 逆时针转动一圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时（图中点 P_0 ）开始计时，则（　　）

（A）点 P 离水面的距离 d（单位：m）与时间 t（单位：s）的函数解析式为 $d=4.8\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})-2.4$

（B）点 P 第一次到达最高点需要 10s

（C）在水轮转动的一圈内，点 P 离水面的高度不低于 4.8m 共有 10s 时间

（D）当水轮转动 50s 时，点 P 在水面下方，距离水面 2.4m



6．（★★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，若 $-\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的图象的对称轴，且对任意的 $x\in(\frac{11\pi}{36},\frac{17\pi}{36})$，$|f(x)|<1$，则 ω 的最大值为（　　）

（A）5　（B）4　（C）3　（D）2

7．（★★★★）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的图象与 x 轴相邻的两个交点的横坐标分别为 $\dfrac{\pi}{6}$ 和 $\dfrac{2\pi}{3}$，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象，若 A，B，C 为两个函数图象的不共线的交点，则 ΔABC 面积的最小值为_____.